Klasse 10

1. Kreis- und Körperberechnungen

Thema	Inhalte	Kommentare
Flächeninhalt und Umfang des Kreises	▪ *Herleitung* Kreiszahl π ▪ Kreisumfang ▪ Kreisflächeninhalt ▪ Bogenlänge exemplarisch entwickeln ▪ Kreisausschnitt exemplarisch entwickeln ▪ Bogenmaß	
Volumen und Oberfläche von Körpern	▪ Schätzen der Maßzahlen von Volumen und Oberfläche von Zylinder, Pyramide, Kegel und Kugel ▪ Berechnen von Oberfläche und Volumen von Zylinder, Pyramide, Kegel und Kugel ▪ *Herleitung der Berechnung des Volumens von Zylinder, Pyramide, Kegel und Kugel* ▪ *Herleitung der Berechnung des Volumens von Zylinder, Pyramide, Kegel und Kugel* ▪ *Satz des Cavalieri*	

2. Exponentielle Zusammenhänge

Thema	Inhalte	Kommentare
Exponentielle Wachstums- und Abnahmeprozesse modellieren	▪ Lineares Wachstum ▪ Exponentielles Wachstum ▪ Überlagerung von linearem und exponentiellem Wachstum ▪ Begrenztes Wachstum ▪ Vergleich der expliziten und iterativen Darstellungen	GTR Modellierungen
Exponentialfunktionen	▪ Eigenschaften von Exponentialfunktionen ▪ Hilfsmittelfreies Skizzieren von exponentiellen Graphen ▪ Bestimmung von Funktionsgleichung aus zwei Punkten, auch hilfsmittelfrei ▪ Ausgleichsfunktion und Regression	GTR Modellierungen

Mit Potenzen rechnen	▪ Rechengesetze für Potenzen exemplarisch begründen und anwenden ▪ Logarithmieren als Umkehroperation zum Potenzieren ▪ *Logarithmengesetze* ▪ Lösen von Exponentialgleichungen – in einfachen Fällen auch hilfsmittelfrei	

3. Periodische Zusammenhänge

Thema	Inhalte	Kommentare
Sinus- und Kosinusfunktion	▪ Periodische Vorgänge ▪ Definition am Einheitskreis ▪ Graph der Sinusfunktion als Verschiebung des Graphen der Kosinusfunktion ▪ Grad- und Bogenmaß	GTR
Sinusfunktion	▪ Zusammenhang Term – Graph für $f(x) = a \cdot \sin\big(b \cdot (x - c)\big) + d$ ▪ Parametervariationen ▪ Hilfsmittelfreie Zeichnungen ▪ Periodische Zusammenhänge modellieren	GTR
Periodische Zusammenhänge modellieren	▪ Anwendungen ▪ *Regressionsmodell*	GTR

4. Näherungsverfahren als Grenzwertprozesse

Thema	Inhalte	Kommentare
Unterscheidung ausgewählter Grenzprozesse	▪ Verfahren zur Annäherung an irrationale Quadratwurzeln ▪ $\overline{0,9} = 1$ als Grenzprozess ▪ Kreiszahl π als Grenzprozess ▪ Exponentieller Zerfall und begrenztes Wachstum als Grenzprozess ▪ Grenzverhalten des Graphen von f für $f(x) = \frac{1}{x}$	
Zahlbereichserweiterungen	▪ Exemplarische Irrationalitätsbegründung ▪ Erweiterung des Zahlenbereichs zu den reellen Zahlen ▪ Rückblick auf frühere Zahlenbereichserweiterungen	

Lernbereich: Kreis- und Körperberechnungen

Intentionen
Es werden Körper und Figuren berechnet, deren Maßzahlen durch Approximation zu bestimmen sind.
Der Umfang oder der Flächeninhalt des Kreises wird durch ein geeignetes Näherungsverfahren bestimmt. Ausgehend von trigonometrischen Beziehungen kann die Annäherung durch regelmäßige n-Ecke einfach und zeitökonomisch gestaltet werden. Es reicht, die Annäherung von innen oder von außen vorzunehmen.
Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass zu Flächeninhalt und Umfang des Kreises dieselbe Kreiszahl π gehört.

Formeln für Bogenlängen und Kreisausschnitte werden exemplarisch entwickelt.

Die Formeln für das Volumen und den Oberflächeninhalt von Pyramide, Kegel und Kugel werden zu Berechnungen verwendet, deren Begründungen werden aber nicht gefordert. Netze und Schrägbilder werden zur Visualisierung genutzt.

Vor dem Berechnen werden die zu bestimmenden Maßzahlen geschätzt; die Schätzwerte werden mit den berechneten Werten verglichen.

Kern
- **Flächeninhalt und Umfang des Kreises ermitteln**
  - Weg zur Kreiszahl π
  - Flächeninhalt und Umfang schätzen und berechnen
  - Bogenlänge und Kreisausschnitt
  - Bogenmaß
- **Maßzahlen ausgewählter Körper schätzen und berechnen**
  - Oberflächeninhalt und Volumen des Zylinders
  - Oberflächeninhalt und Volumen der Pyramide und des Kegels
  - Oberflächeninhalt und Volumen der Kugel

Fakultative Erweiterungen
Weg zum Volumen von Pyramide, Kegel und Kugel;
Weg zum Oberflächeninhalt von Kegel und Kugel

Lernbereich: Exponentielle Zusammenhänge

Intentionen
Ausgehend von der Idee des prozentualen positiven bzw. negativen Zuwachses wird exponentielles Wachstum iterativ eingeführt und auch explizit beschrieben sowie gegen lineares Wachstum abgegrenzt.
Die iterativ beschriebene Überlagerung aus exponentiellem und linearem Wachstum in der Form $b(n) = b(n-1) + w \cdot b(n-1) + d$ mit $w \geq -1$ bzw. $b(n) = k \cdot b(n-1) + d$ mit $k \geq 0$ führt auf vier Fälle, die in Abhängigkeit des Anfangswertes sowie der Parameter d und w bzw. k untersucht und mit Sachsituationen verknüpft werden. Zusammenhänge zwischen iterativer und expliziter Beschreibung begrenzten Wachstums werden hergestellt. In den Fällen, in denen sich begrenztes Wachstum ergibt, kann die Grenze G bestimmt werden.

Die Grenzprozesse bei exponentiellem Zerfall und begrenztem Wachstum werden im Lernbereich „Näherungsverfahren als Grenzprozesse – Zahlbereichserweiterungen“ wieder aufgegriffen.

Die leitenden Fragestellungen bei der Untersuchung der Auswirkungen von Parametervariationen auf Funktionsgraphen und Funktionsgleichungen, die den Schülerinnen und Schülern von den linearen und quadratischen Funktionen bekannt sind, werden hier auf exponentielle Zusammenhänge übertragen. Ein vertieftes Verständnis wird durch den Darstellungswechsel Gleichung – Graph – Tabelle gefördert.

Die Schülerinnen und Schüler sollen die Bedeutung der Parameter erläutern und insbesondere die Graphen der durch f mit x f(x) = a·b für positive b definierten Funktionen skizzieren können.
Die Rechengesetze für Potenzen werden genutzt, um Erkenntnisse über die Funktionen oder einen zugehörigen Sachzusammenhang zu gewinnen.

Das Wurzelziehen und das Logarithmieren werden als Umkehroperationen zum Potenzieren genutzt. Dieser Lernbereich bietet vielfältige Möglichkeiten zur Modellierung.

Kern

- **exponentielle Wachstums- und Abnahmeprozesse modellieren**
  - Sachsituationen iterativ und explizit modellieren
  - lineare und exponentielle Prozesse voneinander abgrenzen
  - Überlagerung von linearem und exponentiellem Wachstum untersuchen
  - Bestimmen der Grenze G beim begrenzten Wachstum
  - Vergleich der expliziten und iterativen Darstellung
- **Exponentialfunktionen untersuchen – Parametervariation**
  - Zusammenhang von Funktionsgleichung und -graph für $f(x) = a \cdot b^x + c$
  - hilfsmittelfreies Skizzieren der Graphen $f(x) = a \cdot b^x$ $f$ür $b > 0$
  - Funktionsgleichungen aus zwei Punkten bestimmen, in einfachen Fällen hilfsmittelfrei
  - Ausgleichsfunktionen mithilfe des Regressionsmoduls oder Parametervariation bestimmen
- **mit Potenzen rechnen**
  - Rechengesetze exemplarisch begründen

Gleichungen umformen und lösen, in einfachen Fällen auch hilfsmittelfrei

Lernbereich: Periodische Zusammenhänge

Intentionen

Ausgehend von den trigonometrischen Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck wird am Einheitskreis die vorzeichenbehaftete Länge der Gegenkathete in Abhängigkeit vom Winkel als Funktion gedeutet.
Die an den linearen und quadratischen Funktionen sowie Exponentialfunktionen gewonnenen Erkenntnisse über Parametervariationen werden hier übertragen und um die Streckung bzw. Stauchung entlang der Rechtsachse ergänzt. Ein vertieftes Verständnis wird durch den Darstellungswechsel Gleichung – Graph – Tabelle gefördert.
Bei der Modellierung können die Schülerinnen und Schüler erstmalig in der Realität auftretende periodische Abläufe (Ebbe und Flut, Temperaturentwicklung im Laufe eines Tages/eines Jahres, Höhe des Sonnenstands etc.) mathematisch erfassen.
Das Lösen der auftretenden Gleichungen erfolgt mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge, wobei ins-besondere auf eine angemessene Darstellung der Lösung im Hinblick auf die Periodizität der Funktion und auf die sachangemessene Wahl des Arguments geachtet wird.

Kern

- **Sinus- und Kosinusfunktion als periodische Funktion**
  - Definition am Einheitskreis
  - Verschiebung des Graphen der Sinusfunktion zum Graphen der Kosinusfunktion
  - Darstellung im Grad- und Bogenmaß
- Sinusfunktion untersuchen – Parametervariation
  - Zusammenhang von Funktionsgleichung und -graph für $f(x) = a \cdot sin\big(b \cdot (x - c)\big) + d$
  - einfache Funktionsgraphen hilfsmittelfrei skizzieren
- **periodische Zusammenhänge modellieren**

Fakultative Erweiterungen

Modellierung mithilfe des Regressionsmoduls

Lernbereich: Näherungsverfahren als Grenzwertprozesse – Zahlbereichserweiterungen

Intentionen
Zahlen können durch Grenzprozesse beschrieben werden.
In diesem Lernbereich werden einige früher unterrichtete Inhalte, die bisher eher naiv verstanden wurden und bei denen Grenzprozesse eine wichtige Rolle spielen, vertieft und neu strukturiert.
Dabei wird jetzt einerseits die Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterungen begründet und andererseits der Grenzwert als eine Zahl eingeführt, der man sich mit einem Näherungsverfahren beliebig dicht annähert. Ziel ist ein verständiger und nachhaltiger Umgang mit Grenzprozessen, der sich auf die Anschauung gründet. Aus diesem Grund sollte auch die Limes-Schreibweise möglichst spät eingeführt werden.
Bisher wurde mit Wurzeltermen naiv gerechnet. Jetzt wird die Irrationalität ausgewählter Quadratwurzeln exemplarisch behandelt und Quadratwurzeln werden (etwa durch das Heron-Verfahren) durch einen Grenzprozess angenähert.
Die frühere Erfahrung, dass es auch rationale Zahlen ohne eindeutige Darstellung gibt, wird hier aufgegriffen und die Identität $0,\overline{9} = 1$ nun als Ergebnis eines Grenzprozesses gedeutet.
Der zur Kreiszahl π führende Grenzprozess wird nun als solcher identifiziert.
Der exponentielle Zerfall und das begrenzte Wachstum werden als Grenzprozesse betrachtet.
Auch die Frage nach dem Grenzverhalten des Graphen von f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ festigt exemplarisch die Vorstellungen über Grenzprozesse.

Die Überlegungen zu Grenzprozessen bereiten die Argumentationsstrukturen der Analysis vor: Dadurch wird der spätere Übergang sowohl von mittleren zu lokalen Änderungsraten als auch die Grundidee der Integralrechung anschaulich und verständlich.

Kern
- **Gemeinsamkeiten und Unterschiede ausgewählter Grenzprozesse beschreiben**
  - ein Verfahren zur Annäherung an irrationale Quadratwurzeln
  - die Identität $0,\overline{9} = 1$ als Grenzprozess
  - die Kreiszahl π als Ergebnis eines Grenzprozesses
  - exponentieller Zerfall und begrenztes Wachstum als Grenzprozesse
  - Grenzverhalten des Graphen von f mit $f(x) = \frac{1}{x}$
- **Zahlbereichserweiterungen erläutern**
  - eine exemplarische Irrationalitätsbegründung
  - Erweiterung der Zahlbereiche zu den reellen Zahlen
  - Rückblick auf frühere Zahlbereichserweiterungen

Fakultative Erweiterungen
Grenzverhalten der Graphen von f und g mit $f(x) = a \pm \frac{b}{x} \quad und \quad g(x) = a \cdot b^x; b > 0$;
Grenzprozesse beim Pyramidenvolumen, bei der Kegelmantelfläche und bei der Kugel